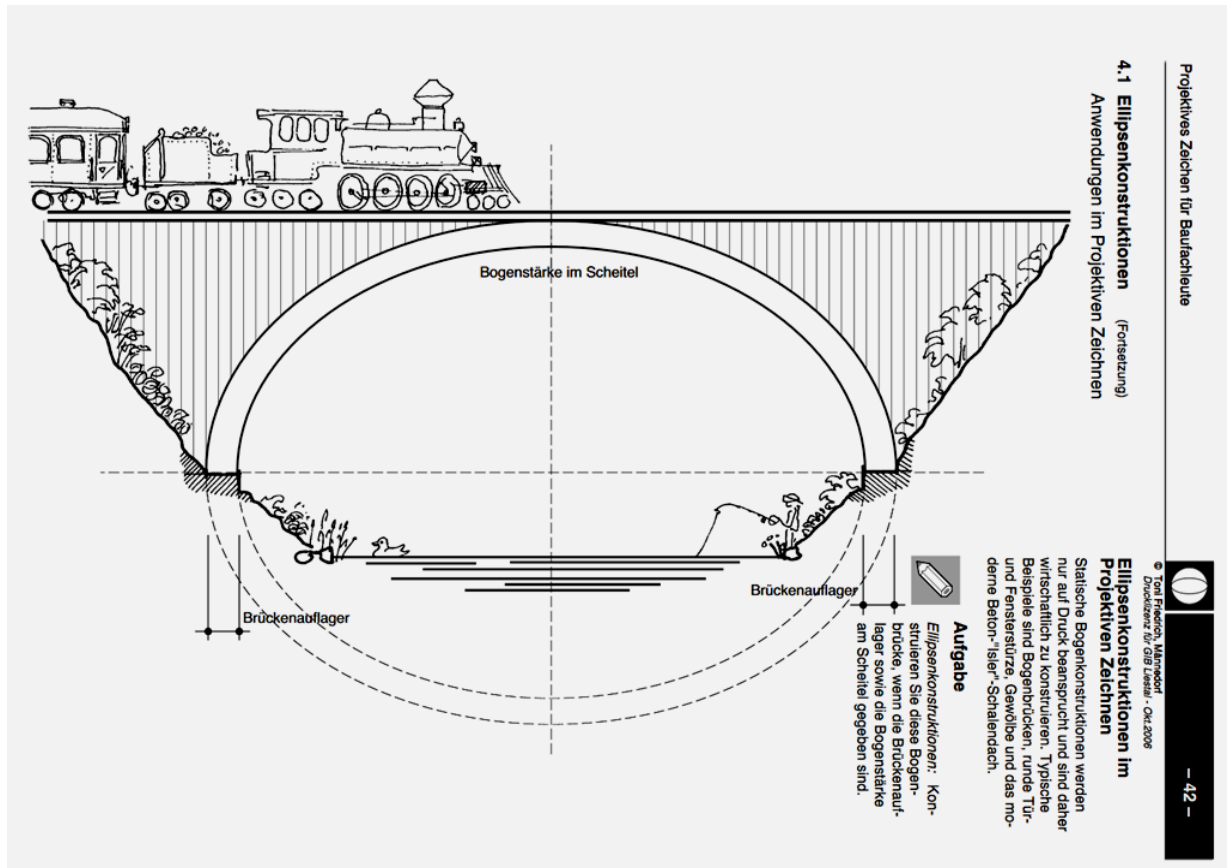


Ellipszis alakú híd

Az interneten találtuk az alábbi feladatot az [1] e - jegyzetben. Ehhez tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra

Eszerint – kicsit átírva – : Szerkesszük meg az ellipszishatárolású ívhidat, ha adott a támaszlap szélessége és középen a híd vastagsága!

A megoldás során az *ellipszis kanonikus egyenletét* alkalmazzuk – [2]. Legyenek:

~ a felső ellipszis nagy - és kistengely - adatai: a_f , b_f ;

~ az alsó ellipszis nagy - és kistengely - adatai: a_a , b_a ;

~ a támaszlap szélessége: d ;

~ a híd vastagsága középen: e .

Összefüggéseik:

$$a_a = a_f - d, \quad b_a = b_f - e. \quad (1)$$

A felső ellipszis egyenlete:

$$\left(\frac{x}{a_f}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_f}\right)^2 = 1; \quad (2)$$

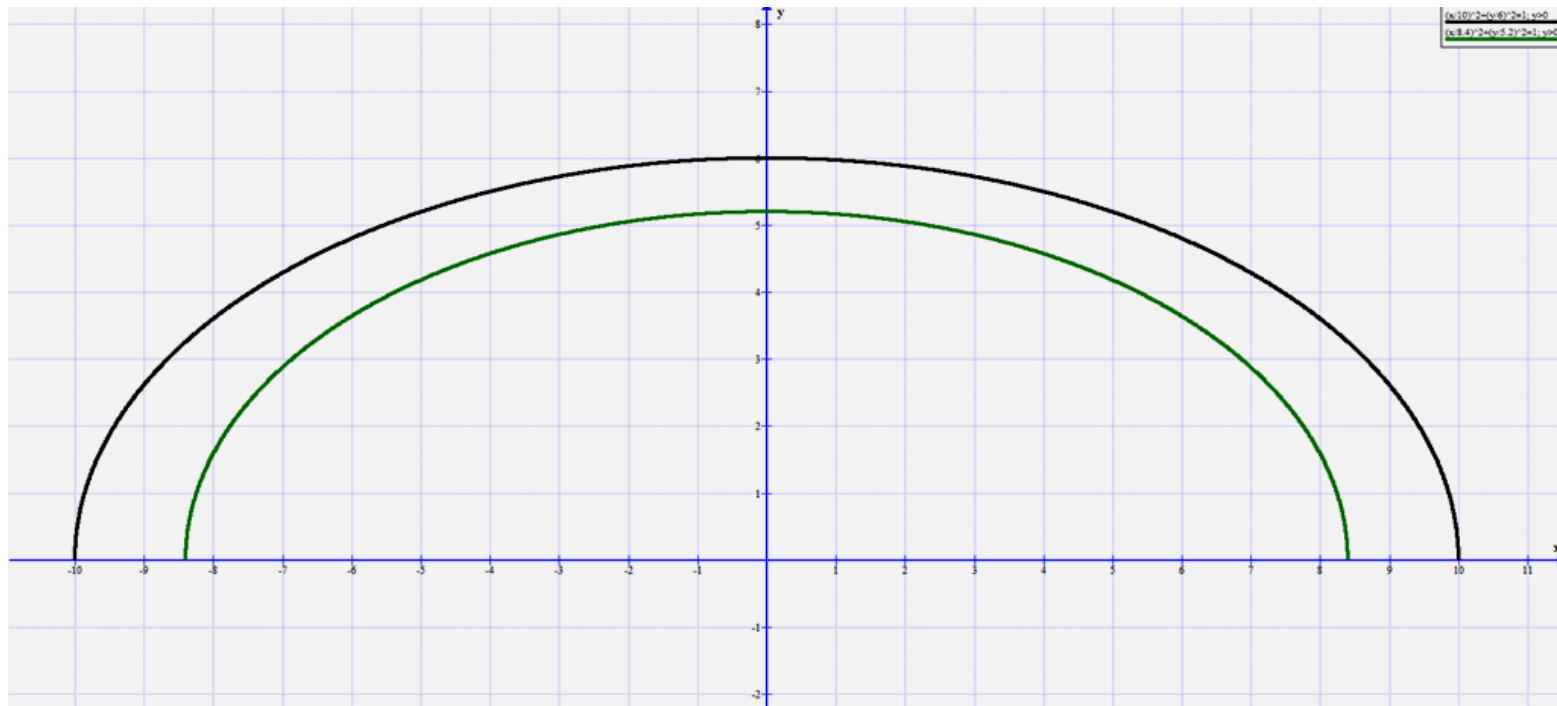
az alsó ellipszis egyenlete (1) és (2) szerint:

$$\left(\frac{x}{a_f-d}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_f-e}\right)^2 = 1. \quad (3)$$

Az ábrázoláshoz önkényesen felvett adatok:

$$a_f = 10 \text{ cm}; \quad b_f = 6 \text{ cm}; \quad d = 1,6 \text{ cm}; \quad e = 0,8 \text{ cm}. \quad (A)$$

A (2), (3) és (A) - val készült grafikonok a 2. ábrán szemlélhető meg.



2. ábra

Azonban felmerülhet a gyanú, hogy a 2. ábra készítéséhez túl sok adatot vettünk fel.

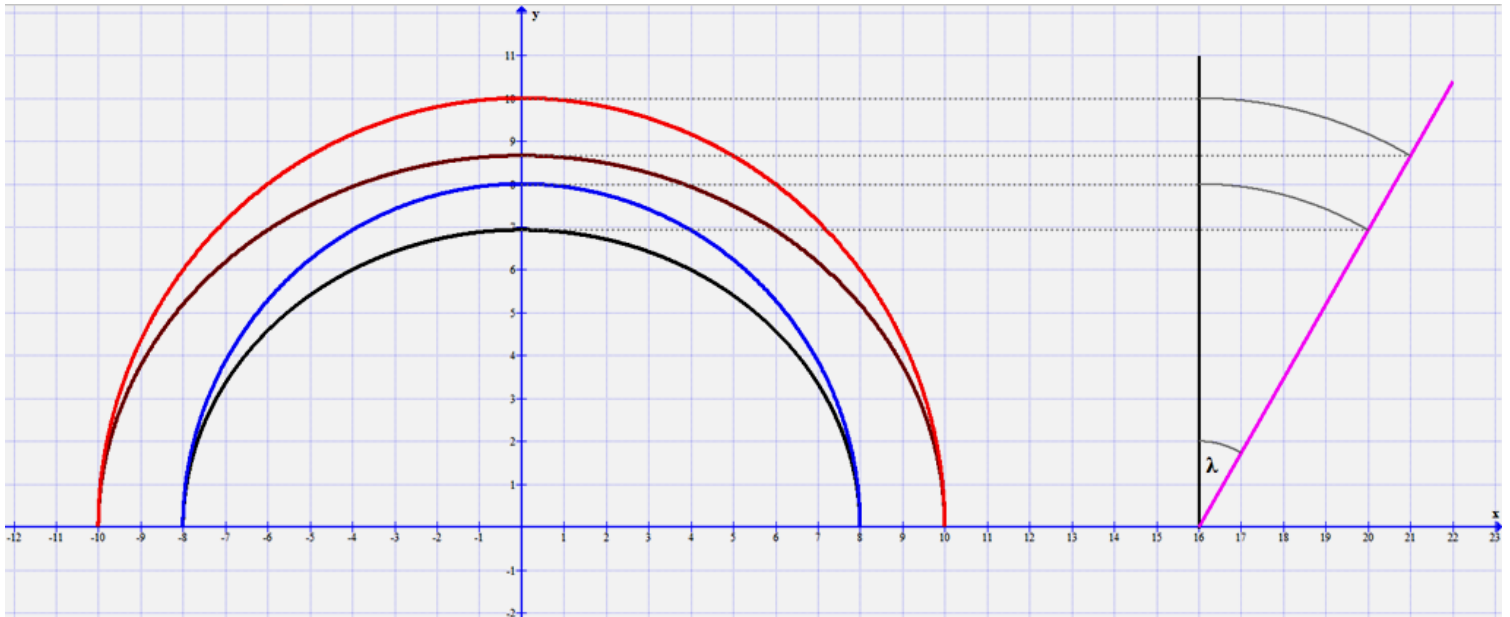
Mert mi van akkor, hogy a feladat készítője úgy képzelte, hogy az **e** és **d** adatok össze - függnek? Ez az eset előáll, ha úgy vesszük, hogy a híd oldalnézetének határoló ellipszisei úgy álltak elő, hogy két koncentrikus kör merőleges vetületét képeztük.

Ehhez lásd a 3. ábrát is! Ez alapján is:

$$e = b_f - b_a = a_f \cdot \cos \lambda - a_a \cdot \cos \lambda = (a_f - a_a) \cdot \cos \lambda = d \cdot \cos \lambda, \quad \text{tehát:} \\ \frac{e}{d} = \cos \lambda. \quad (4)$$

Ezután (4) - gyel is:

$$b_a = a_a \cdot \cos \lambda = a_a \cdot \frac{e}{d}, \quad b_f = b_a + e, \quad a_f = a_a + d. \quad (5)$$



3. ábra

Úgy is fogalmazhatunk, hogy ekkor

~ adott: a_a, e, d ;

~ keresett: a_f, b_a, b_f .

Azonban az 1. ábra szerinti feladat - kiírásból még mindig hiányzik a_a megadása. Persze, mondhatjuk, hogy ez a belső nyílás fele, és mint ilyen, változó, tehát paraméteresen adott. Ez azonban nem annyira jellemző a geometriai feladatok kiírásánál; sokkal inkább az a szokás, hogy megmondják, mi mennyi. Azonban ez még így is egy tanulságos és szép feladat – a kiegészítésekkel együtt.

A 3. ábra elkészítéséhez felvett adatok:

$$a_a = 8 \text{ cm}; \quad d = 2 \text{ cm}; \quad (\lambda = 30^\circ;) \quad e = 1,732 \text{ cm}. \quad (B)$$

Megjegyezzük, hogy ha $e = d$, akkor (4) -ből $\lambda = 0^\circ$, vagyis ennek a koncentrikus fél - körök esete felel meg. Ez nem lehet, hiszen ez a feladat ellipszisekkel határolt hídakról szól. Ebből következik, hogy a második alakmodell esetén $e \neq d$, illetve (4) szerint $e < d$. Felvetődik a kérdés, hogy egyébként lehet - e $e = d$. Az első alakmodellel dolgozva ekkor:

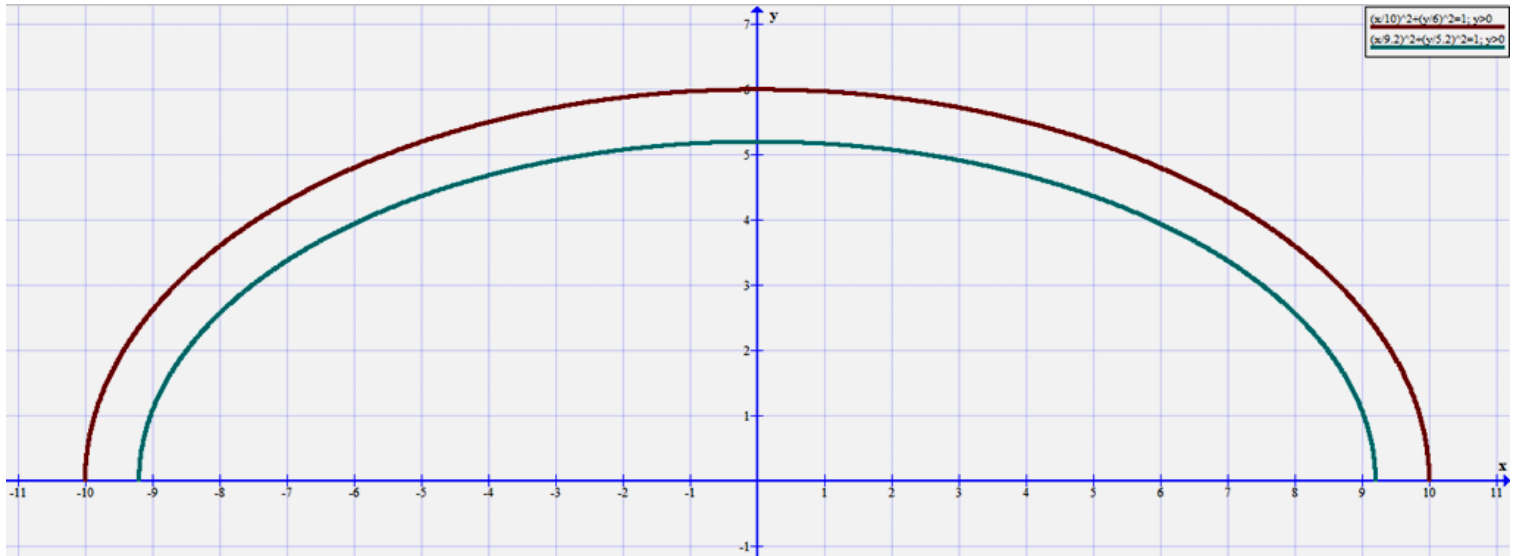
$$\left(\frac{x}{a_f}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_f}\right)^2 = 1; \quad (2)$$

$$\left(\frac{x}{a_f - d}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_f - d}\right)^2 = 1. \quad (3^*)$$

Most ismét adatokat véve fel, (A) - t kicsit módosítva:

$$a_f = 10 \text{ cm}; \quad b_f = 6 \text{ cm}; \quad d = e = 0,8 \text{ cm} . \quad (A^*)$$

A (2), (3*), (A*) - nak megfelelő grafikonok a 4. ábrán szemlélhetők.



4. ábra

Látjuk, hogy a feladat pontos megoldásához az az információ kevés, amit az 1. ábrán találunk. Kiegészítő információkkal azonban több érdekes megoldás - változathoz juthatunk. Valójában nem ragaszkodtunk az eredeti feladathoz, hiszen adathiány miatt azt igazából meg sem tudnánk oldani.

Talán mondani sem kell, hogy egy híd alakjának megválasztásakor sok más, nem geometriai feltétel teljesülését is biztosítani kell.

Források:

[1] – <http://www.gibliestal.ch/files/downloads/zeichner/Proj.Zeichnen-A-GIB-Okt.06.pdf>

[2] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev:** Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnök tanár

Sződliget, 2018. 01. 14.